



ce
pre
UNI

CICLO
PREUNIVERSITARIO

2024-1

Álgebra

TEMA NÚMEROS REALES



NÚMEROS REALES

En el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales se definen dos operaciones binarias denotadas por $(+)$ y $(\cdot)$ llamadas adición y multiplicación respectivamente, estas operaciones satisfacen los siguientes axiomas

Axioma de clausura

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \begin{cases} (a + b) \in \mathbb{R} \\ (a \cdot b) \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Axioma de conmutatividad

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \begin{cases} a + b = b + a \\ a \cdot b = b \cdot a \end{cases}$$

Axioma de asociatividad

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} (a + b) + c = a + (b + c) \\ (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \end{cases}$$

Axioma de existencia del elemento neutro

$$\exists 0 \in \mathbb{R} \mid \forall a \in \mathbb{R}, a + 0 = a$$

$$\exists 1 \in \mathbb{R} \mid \forall a \in \mathbb{R}, a \cdot 1 = a$$

Nota. Se comprueba que el elemento neutro es único

Axioma de existencia del elemento inverso

$$\forall a \in \mathbb{R}, \exists -a \in \mathbb{R} \mid a + (-a) = 0$$

$$\forall a \in \mathbb{R}^*, \exists a^{-1} \in \mathbb{R} \mid a \cdot a^{-1} = 1$$

Nota. Se comprueba que el elemento inverso es único

Axioma de distributividad

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R}, \quad a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

Observaciones

(1) $\mathbb{R}^* = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0 \}$

(2) Un conjunto no vacío $\mathbb{K}$ donde se definen dos operaciones $(+)$ y $(\cdot)$ que cumplen estos 11 axiomas se llama **CAMPO** o **CUERPO**

(3) Son ejemplos de CAMPO los conjuntos $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$

(4) Si a y b son números reales

$$a - b = a + (-b)$$

$$\frac{a}{b} = a \cdot b^{-1} \quad (b \neq 0)$$

Ejemplo de teorema

Sean a , b y x números reales, demostrar los siguientes teoremas

(1) Si $x + a = x + b$ entonces $a = b$ **Hipótesis :** $x + a = x + b$

$a = 0 + a$ **Existencia del elemento neutro aditivo**

$= (-x + x) + a$ **Existencia del inverso aditivo**

$= -x + (x + a)$ **Axioma de asociatividad**

$= -x + (x + b)$ **Hipótesis**

$= (-x + x) + b$ **Axioma de asociatividad**

$= 0 + b = b$ **Existencia del elemento neutro e inverso aditivo**

$\therefore a = b$

Ejemplo de teorema

Sean a , b y x números reales, demostrar los siguientes teoremas

$$(2) \quad a \cdot 0 = 0$$

$$a \cdot 0 + 0 = a \cdot 0$$

$$= a \cdot (0 + 0)$$

$$= a \cdot 0 + a \cdot 0$$

Luego $a \cdot 0 + 0 = a \cdot 0 + a \cdot 0$

Según el teorema anterior $a \cdot 0 = 0$

Existencia del elemento neutro aditivo

Existencia del elemento neutro aditivo

Axioma de distributividad

AXIOMAS DE ORDEN

En $\mathbb{R}$ se define la relación de orden " $<$ ", que satisface los siguientes axiomas

Axioma 1 (Ley de la tricotomía) Sean $a, b \in \mathbb{R}$, se cumple una y sólo una de las siguientes afirmaciones

$$a < b \quad \text{o} \quad a = b \quad \text{o} \quad b < a$$

Axioma 2 (Ley transitiva) Si $a < b$ y $b < c$ entonces $a < c$

Axioma 3 (Ley aditiva) Si $a < b$ y $x \in \mathbb{R}$, entonces $a + x < b + x$

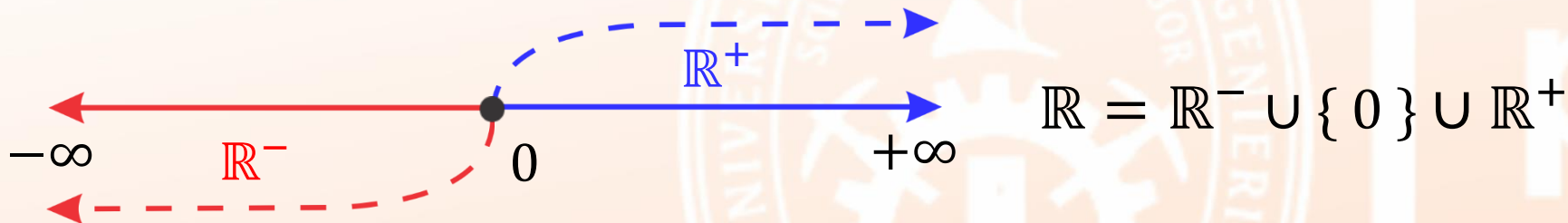
Axioma 4 (Ley multiplicativa) Si $a < b$ y $0 < c$ entonces $ac < bc$

Observación

Un campo $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ donde se define una relación de orden " $<$ " y que cumple estos 4 axiomas, se llama **cuerpo ordenado**.

$\mathbb{R}$ y $\mathbb{Q}$ son cuerpos ordenados

Sea $x \in \mathbb{R}$, al utilizar la ley de tricotomía, se cumple una y sólo una de las siguientes afirmaciones $x < 0$ o $x = 0$ o $0 < x$



Sean $a, b \in \mathbb{R}$, se dice que **a es menor que b** y lo denotamos por $a < b$

$$a < b \iff 0 < b - a$$

NÚMEROS REALES

Sean a, b y c números reales, se define :

$$a > b \leftrightarrow b < a$$

$$a < b \leq c \leftrightarrow (a < b) \wedge (b \leq c)$$

$$a \leq b \leftrightarrow (a < b) \vee (a = b)$$

$$a \geq b \leftrightarrow b \leq a$$

Observaciones

$$\square \mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$$

$\square$ Si $a > b$ se dice que a es mayor que b

$$\square \mathbb{R}^- = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$$

$\square$ Si $a \leq b$ se dice que a es menor o igual que b

$\square$ Si $a \geq b$ se dice que a es mayor o igual que b

Teoremas de desigualdades

Sean a, b, c, x e y números reales, se cumple

- Si $a < b$ y $c < 0$ entonces $ac > bc$
- Si $a < b$ y $c < d$ entonces $a + c < b + d$
- $\forall a \in \mathbb{R}, a^2 \geq 0$
- $a > 0$ si y sólo si $\frac{1}{a} > 0$
- $a \neq 0$ si y sólo si $a^2 > 0$
- $a < 0$ si y sólo si $\frac{1}{a} < 0$
- $ab > 0$ si y sólo si $(a > 0 \wedge b > 0) \vee (a < 0 \wedge b < 0)$
- $ab < 0$ si y sólo si $(a > 0 \wedge b < 0) \vee (a < 0 \wedge b > 0)$
- $(ax + by)^2 \leq (a^2 + b^2)(x^2 + y^2)$ (**Desigualdad de Schwarz**)

49. Si $a < b < 0$ y $0 < c < d$. Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. $a^3 \cdot (c + 1) < d^3$

II. $ad + bc < ac + bd$

III. $ad < ac < bc$

Resolución

I. $a^3(c + 1) < d^3$

$(-)(+) < (+) \quad (V)$

II. $ad + bc < ac + bd \Leftrightarrow ad - ac < bd - bc$

$a(d - c) < b(d - c) \Leftrightarrow a < b \quad (V)$

III. $ad < ac < bc \Leftrightarrow ad < ac \wedge ac < bc$

$\Leftrightarrow d > c \wedge a < b \quad (V)$

Ejemplo

Indique el valor de verdad de las proposiciones:

- I. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $a > b$ entonces $a \geq b$.
- II. Sea $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $a \geq b$ entonces $a^2 + 1 \geq 2b$.
- III. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $a^2 + b^2 = 1$ entonces $ab \leq 1$.

Resolución

I. Si $a > b \equiv \text{V}$ tenemos que $a \geq b \leftrightarrow (a > b) \vee (a = b)$
 $\text{V} \vee \text{p} \equiv \text{V}$

II. Sea $a \in \mathbb{R}$, $(a - 1)^2 \geq 0$:

$$a^2 + 1 \geq 2a \quad \text{y} \quad a \geq b \quad \text{se tiene} \quad a^2 + 1 \geq 2b \quad \text{V}$$

III. Sea $a, b \in \mathbb{R}$, $(a - b)^2 \geq 0$:

$$a^2 + b^2 \geq 2ab \quad \text{entonces} \quad 1/2 \geq ab \quad \text{luego} \quad 1 \geq 1/2 \geq ab \quad \text{V}$$

Ejemplo

Sean $m, n, p \in \mathbb{R}$, si $m + 2n + p = 12$, calcule el menor valor de $E = m^2 + n^2 + p^2$

Resolución

Sean m, n, p, x, y, z números reales, se cumple :

$$(mx + ny + pz)^2 \leq (m^2 + n^2 + p^2)(x^2 + y^2 + z^2)$$

(**Desigualdad de Schwarz**)

Si $x = 1, y = 2, z = 1$

$$(m + 2n + p)^2 \leq (m^2 + n^2 + p^2)(1^2 + 2^2 + 1^2)$$

Dado que $m + 2n + p = 12$

$$12^2 \leq 6(m^2 + n^2 + p^2)$$

$$24 \leq m^2 + n^2 + p^2$$

Por lo tanto, el menor valor de $E = m^2 + n^2 + p^2$ es 24

Teoremas de acotación

Sean a, b, c y x números reales, se cumple :

- $0 < a < b \rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

- $0 < a < b \rightarrow a^2 < b^2$

$$a < x < b$$

- $0 < a < b \rightarrow a^2 < x^2 < b^2$

- $a < 0 < b \rightarrow 0 \leq x^2 < \max\{a^2, b^2\}$

- $a < b < 0 \rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

- $a < b < 0 \rightarrow a^2 > b^2$

- $a < b < 0 \rightarrow a^2 > x^2 > b^2$

Ejercicio

Si $0 < a < b$, demostrar que $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

Dado que $a > 0$ y $b > 0$ entonces $\frac{1}{a} > 0$, $\frac{1}{b} > 0$ y $\frac{1}{ab} > 0$,

Si $a < b$ y $\frac{1}{ab} > 0$, entonces $a \left(\frac{1}{ab} \right) < b \left(\frac{1}{ab} \right)$, $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$

O de forma equivalente $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

Ejemplos

Sean a, b, c y x números reales

$$\bullet \quad a < b \Leftrightarrow 13a < 13b$$

$$\frac{a}{20} < \frac{b}{20}$$

$$\bullet \quad a < b \Leftrightarrow -5a > -5b$$

$$\frac{a}{-\pi} > \frac{b}{-\pi}$$

$$\bullet \quad 3 < x < 6 \Leftrightarrow \frac{1}{3} > \frac{1}{x} > \frac{1}{6}$$

$$\bullet \quad -5 < x < -2 \Leftrightarrow \frac{1}{-5} > \frac{1}{x} > \frac{1}{-2}$$

$$\bullet \quad x > c$$

$$-2x < -2c \quad \times (-2)$$

$$-2x + 5 < -2c + 5 \quad +5$$

$$\frac{-2x + 5}{7} < \frac{-2c + 5}{7} \quad \div 7$$

$$\bullet \quad -7 < x < 2 \rightarrow 0 \leq x^2 < 49$$

$$\bullet \quad -5 \leq x < 2 \rightarrow 0 \leq x^2 \leq 25$$

$$\bullet \quad -2 \leq x < 4 \rightarrow 0 \leq x^2 < 16$$

Ejemplo Determine $A = \left\{ \frac{x-1}{x+2} \in \mathbb{R} : 1 < x \leq 3 \right\}$

Resolución

Damos forma:

$$E = \frac{x-1}{x+2}$$

$$E = \frac{(x+2) - 3}{x+2}$$

$$E = \frac{(x+2)}{x+2} - \frac{3}{x+2}$$

$$E = 1 - \frac{3}{x+2}$$

De $1 < x \leq 3$

$$3 < x+2 \leq 5$$

$$\frac{1}{3} > \frac{1}{x+2} \geq \frac{1}{5}$$

$$-1 < \frac{-3}{x+2} \leq -\frac{3}{5}$$

$$0 < 1 + \frac{-3}{x+2} \leq \frac{2}{5}$$

Por lo tanto, $A = \langle 0, 2/5 \rangle]$

+2

inversa

× (-3)

+1

Teoremas de las medias

Si $x_1, x_2, \dots, x_n$ son números reales positivos

MEDIA ARITMÉTICA : $\overline{MA} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$

MEDIA GEOMÉTRICA : $\overline{MG} = \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}$

MEDIA ARMÓNICA : $\overline{MH} = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}}$

(1) $\overline{MA} \geq \overline{MG} \geq \overline{MH}$

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$$

- $a > 0 \leftrightarrow a + \frac{1}{a} \geq 2$

- $a < 0 \leftrightarrow a + \frac{1}{a} \leq -2$

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc} \geq \frac{3}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}$$

(2) $\overline{MA} = \overline{MG} = \overline{MH} \leftrightarrow$ Los números son iguales

Ejemplo

Determine A donde: $A = \left\{ \frac{x-1}{x^2+2x-2} \in \mathbb{R} : x > 1 \right\}$

Resolución Damos forma:

$$E = \frac{x-1}{x^2+2x-2}$$

$$E = \frac{x-1}{x^2-2x+1+4x-3}$$

$$E = \frac{x-1}{(x-1)^2+4(x-1)+1}$$

$$E = \frac{1}{(x-1) + \frac{1}{(x-1)} + 4}$$

De : $x > 1$

$$x-1 > 0$$

$$x-1 + \frac{1}{x-1} \geq 2$$

$$x-1 + \frac{1}{x-1} + 4 \geq 6$$

$$0 < \frac{1}{(x-1) + \frac{1}{(x-1)} + 4} \leq 1/6$$

Por lo tanto $A = \langle 0, 1/6 \rangle$

Diagram illustrating the AM-GM inequality application:

- Let $a = x-1$, then $a > 0$.
- Apply AM-GM: $a + \frac{1}{a} \geq 2$ (with equality when $a=1$).
- Add 4 to both sides: $a + \frac{1}{a} + 4 \geq 6$.
- Invert the inequality (labeled "inversa" in red): $\frac{1}{a + \frac{1}{a} + 4} \leq \frac{1}{6}$.

Observación

Sean a, b números reales positivos

Media potencial de índice n ($n \in \mathbb{Z} - \{0\}$) : $MP(n) = \left(\frac{a^n + b^n}{2} \right)^{\frac{1}{n}}$

Teorema

Sean m, n números enteros no nulos

Si $m > n$ entonces $MP(m) \geq MP(n)$

$$\left(\frac{a^3 + b^3}{2} \right)^{\frac{1}{3}} \geq \left(\frac{a^2 + b^2}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \geq \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \geq \left(\frac{2}{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}} \right)^{\frac{1}{2}} \geq \left(\frac{2}{\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3}} \right)^{\frac{1}{3}}$$

Ejemplo

Sean a, b y c números reales positivos. Si $a + b + c = 6$, entonces halle la variación de $M = a^3 + b^3 + c^3$

Resolución

Dado que $MP(3) \geq MP(1)$

$$MP(n) = \left(\frac{a^n + b^n + c^n}{3} \right)^{\frac{1}{n}}$$

$$\left(\frac{a^3 + b^3 + c^3}{3} \right)^{\frac{1}{3}} \geq \frac{a + b + c}{3}, \quad \left(\frac{M}{3} \right)^{\frac{1}{3}} \geq \frac{6}{3}, \quad \frac{M}{3} \geq 2^3$$

$$\rightarrow M \geq 24$$

Por lo tanto, la variación de M es $[24; +\infty)$

INTERVALO

Sea $I \subset \mathbb{R}$, I es un intervalo, si y sólo si $\forall a, b \in I, a < x < b \rightarrow x \in I$
(x es cualquier número real)

Sean a y b números reales, son intervalos

$$\{ x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b \} = [a ; b]$$

$$\{ x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \} = [a ; +\infty)$$

$$\{ x \in \mathbb{R} \mid a < x < b \} = \langle a ; b \rangle$$

$$\{ x \in \mathbb{R} \mid x < b \} = \langle -\infty ; b \rangle$$

$$\{ x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b \} = [a ; b)$$

$$\{ x \in \mathbb{R} \mid x \leq b \} = \langle -\infty ; b]$$

$$\{ x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b \} = \langle a ; b]$$

$$\langle -\infty ; +\infty \rangle = \mathbb{R}$$

$$\{ x \in \mathbb{R} \mid a < x \} = \langle a ; +\infty \rangle$$

$$\langle a ; a \rangle = \emptyset \text{ (Conjunto Vacío)}$$

$$[a ; a] = \{a\} \text{ (Conjunto unitario)}$$

Observaciones

(1) Son intervalos

$$\langle a ; a \rangle = \emptyset \text{ (Conjunto Vacío)} \quad [a ; a] = \{a\} \text{ (Conjunto unitario)}$$

$$\langle -\infty ; +\infty \rangle = \mathbb{R}$$

(2) La intersección de intervalos es un intervalo.

(3) La unión de intervalos no necesariamente es un intervalo, por ejemplo:

$I_1 = [1,2]$, $I_2 = [3,4]$ son intervalos, pero tenemos que:

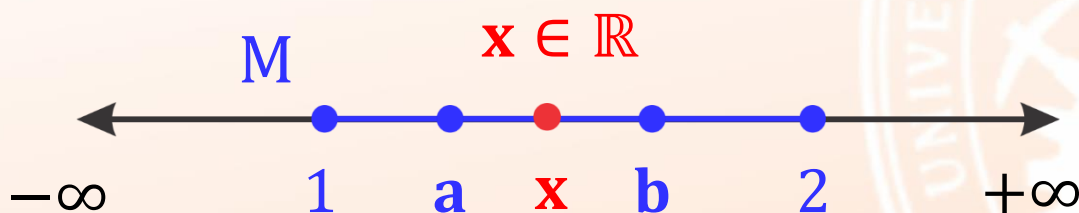
$$I = I_1 \cup I_2 = [1,2] \cup [3,4] \text{ no es un intervalo.}$$

Observación

Sea $I \subset \mathbb{R}$, I NO es un intervalo, si y sólo si $\exists a, b \in I / a < x < b \wedge x \notin I$
(para algún $x \in \mathbb{R}$)

Ejemplo

El conjunto $M = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 2\}$
es un intervalo.



$$\forall a, b \in M, a < x < b \rightarrow x \in M$$

Ejemplo

El conjunto $T = [1; 2] \cap \mathbb{Q}$
NO es un intervalo.

$$\begin{array}{l} \exists a = 1 \in T \\ \exists b = 2 \in T \end{array} / a < x < b \wedge x \notin T$$

(para $x = \sqrt{3} \in \mathbb{R}$)

PRODUCTOS NOTABLES Y EQUIVALENCIAS ALGEBRAICAS

Sean a , b y c números reales, se cumple

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

$$(a - b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a - b)$$

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$$

$$(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$$

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$$

$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$$

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ac)$$

$$(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a + b)(b + c)(a + c)$$

$$(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a + b + c)(ab + bc + ac) - 3abc$$

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac)$$

Si $a + b + c = 0$, entonces se cumple :

$$a^2 + b^2 + c^2 = -2(ab + bc + ac)$$

$$a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$$

Ejemplo

Si $m^2 + n^2 = 4$ y $m + n = 4$. Calcule $T = m^3 + n^3$

Resolución

Dado que $m^2 + n^2 = (m + n)^2 - 2mn$, al sustituir los datos

$$4 = 4^2 - 2mn, \quad mn = 6$$

asimismo

$$m^3 + n^3 = (m + n)^3 - 3mn(m + n)$$

al reemplazar los datos anteriores

$$m^3 + n^3 = 4^3 - 3(6)(4), \text{ luego } m^3 + n^3 = -8$$

59. Al simplificar la expresión:

$$E = (x + y + z)^2 + (x + y - z)^2 + (x - y + z)^2 + (-x + y + z)^2 - 4(x^2 + y^2 + z^2)$$

Se obtiene:

Resolución

$$\begin{aligned} (x + y + z)^2 + (x + y - z)^2 &= 2[(x + y)^2 + (z)^2] \\ (z + x - y)^2 + [z - (x - y)]^2 &= 2[(z)^2 + (x - y)^2] \end{aligned}$$

(+)

$$E + 4(x^2 + y^2 + z^2) = 2[(x + y)^2 + (x - y)^2] + 4z^2$$

$$E + 4(x^2 + y^2 + z^2) = 4x^2 + 4y^2 + 4z^2$$

$$E = 0$$